مدل بندی آریتمی های قلبی با استفاده از اعداد چرخش

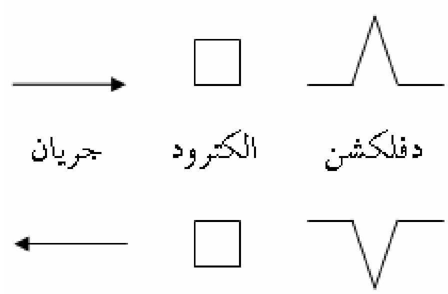
صمد شفیع زاده

چکیده

امروزه دینامیک بسیاری از رخدادهای طبیعی و تجربی را می توان با استفاده از نگاشت هایی که نقاط روی دایره را به یک دایره می نگارند مدل بندی نمود. در این مقاله نشان داده ایم که اگر عضله قلب از فعالیت ریتمیک و به هنجار خود خارج شده باشد، آنگاه عدد چرخش بالابر PG– نگاشت نمودارهای مندرج بر روی کاغذ الکتروکاردیوگرام گویا است. و همین طور اگر عدد چرخش بالابر PG– نگاشت نمودارهای مندرج بر روی کاغذ الکتروکاردیوگام گنگ باشد. آنگاه عضله قلب دارای فعالیت منظم و ریتمیک است.

تعریف و قضایای مقدماتی

جریان های الکتریکی با ولتاژ پایین که بر اثر فعالیت خود انگیزاننده عضله قلب تولید می شوند، به تدریج به داخل بافت های اطراف قلب گسترش می یابند و مقداری از جریانات تا سطح پوست می رسند. هر گاه الکترودهایی بر روی سطح بدن در دو طرف مقابل قلب قرار داده شوند، اختلاف پتانسیل الکتریکی تولید شده را می توان به وسیله الکتروکاردیوگرافی ضبط و بر روی کاغذ الکتروکاردیوگرام ثبت نمود. امواج مختلف در الکتروکادیوگرام توسط جریان های الکتریکی ایجاد می شوند، که می توانند هم جهت و یا در خلاف جهت الکترودهای متصل شده به سطح بدن بیمار باشند. وقتی جریان الکتریکی به طرف الکترود باشد، یک دفلکشن (*Deflection*) مثبت (بالای خط ایزوالکتریک) رسم می گردد و اگر هیچ گونه جریان الکتریکی وجود نداشته باشد، دفلکشن رسم نمی شود و تنها یک خط ایزوالکتریکی روی کاغذ الکتروکاردیوگرام مشاهده می گردد.



اگر اختلالی در فعالیت ریتمیک و به هنجار قلب اتفاق بیافتد، گوییم آریتمی رخ داده است. بی نظمی های ناشی از اختلال فعالیت قلب را با استفاده از اعداد چرخش برای بالابر PG– نگاشت ها می توان مدل بندی نمود. فرض کنیم $f:S^1\to S^1$ یک نگاشت دایره ای یک – درجه و F تابعی نانزولی از خط حقیقی R به خودش که f را توسط تابع تصویری $\pi:R\to S^1$ می پوشاند. در این صورت F یک بالابر نگاشت دایره ای f است. رودس و تامپسون(۱۹۸۶) نشان دادند، که عدد چرخش F $\rho(F)=\lim_{n\to\infty}\frac{F^n(x)-x}{n}$ برای بالابر همانسانی های دایره ای یک – درجه موجود و مستقل از متغییر x است. در این متن نگاشت های دایره ای را به صورت نگاشت های بازه ای $[0,1)$ یا $(0,1]$ در نظر گرفته ایم. اگر نگاشت دایره ای یک – درجه $f:(0,1]\to(0,1]$ دارای یک نقطه ناپیوستگی و یک هم سطحی (بازه ای که نگاشت روی آن ثابت است) باشد. آن را PG– نگاشت می نامیم. حال فرض کنیم F نگاشتی از خط حقیقی R به خودش و f یک PG– نگاشت باشد و به ازای هر $x\in R$؛ $\pi(F(x))=f(\pi(x))$، در این صورت؛

(أ) F نانزولی است و به ازای هر $F(x+1)=F(x)+1$ ؛

(ب) $0<g_1(F)=\lim_{x\uparrow 1}F(x)-1<\lim_{x\downarrow 0}f(x)=g_2(F)<1$

(ج) $p_1(F)<p_2(F)$ وجود دارد به قسمی که F روی بازه $(0,1)$ پیوسته و روی بازه های $(0,p_1(F))$ و $(p_2(F),1)$ اکیداً صعودی و روی بازه $(p_1(F),p_2(F))$ ثابت است و

(د) به ازای هر $x\in R$؛ $x<F(x)<x+1$

فرض کنیم F یک بالابر PG– نگاشت f باشد

$F_0(x)=\sup_{y<x}F(y)$ و $F_1(x)=\inf_{y>x}F(y)$ را بالابر اکسترمال می نامیم و تعریف می کنیم:

$c_2=\sup_{0<y<1}\{y:F(y)\le 1\}$ و $c_1=\inf_{0<y<1}\{y:F(y)\ge 1\}$

اگر $c_1=c_2$ آن نقطه را با c نمایش می دهیم.

لم ۱ . فرض کنیم F بالابر یک PG– نگاشت با بالابرهای اکسترمال F_0 و F_1 بوده و

$f_0(x)=\begin{cases}F_1(x) & ,x\in[0,c_2]\\ F_0(x)-1 & ,x\in(c_2,1]\end{cases}$ و $f_1(x)=\begin{cases}F_1(x) & ,x\in[0,c_1)\\ F_0(x)-1 & ,x\in[c_1,1]\end{cases}$ آنگاه ؛

$$\rho(F_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}card\{m|f_0^m(x)\in[c_2,1];0\le m<n\} \text{ و } \rho(F_1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}card\{m|f_1^m(x)\in[c_1,1];0\le m<n\}$$

اثبات . ($[P\text{-}G]$ را ببینید) .

نگاشت های f_0 و f_1 نگاشت های باز بهنجارش شده هستند.

حال اگر $f(1)<f(0)<c_1$. توابع $r_i:[f(0),1]\to[f(0),1]$ ، $i=0,1$ ، را باضابطه های $r_0=\begin{cases}f_0(x) & ,x\in[f(0),c_2)\\ f_0^2(x) & ,\quad x\in[c_2,1]\end{cases}$ و $r_1=\begin{cases}f_1(x) & ,x\in[f(0),c_1]\\ f_1^2(x) & ,\quad x\in(c_1,1]\end{cases}$ در نظر می گیریم.

این توابع در بازه $[0,1]$ نگاشت بازبهنجارش شده $Rf_i:[0,1]\to[0,1]$ ، $i=0,1$، را به دست می دهند.

همچنین اگر $c_2<f(1)<f(0)$. توابع $l_i:[0,f(1)]\to[0,f(1)]$ ، $i=0,1$، را با ضابطه های $l_0=\begin{cases}f_0^2(x) & ,\quad x\in[0,c_2]\\ f_0(x) & ,x\in(c_2,f(1)]\end{cases}$ و $l_1=\begin{cases}f_1^2(x) & ,\quad x\in[0,c_1)\\ f_1(x) & ,x\in[c_1,f(1)]\end{cases}$ در نظر می گیریم.

این توابع در بازه $[0,1]$ نگاشت باز بهنجارش شده $Lf_i:[0,1]\to[0,1]$ ، $i=0,1$ ، را به دست می دهند.

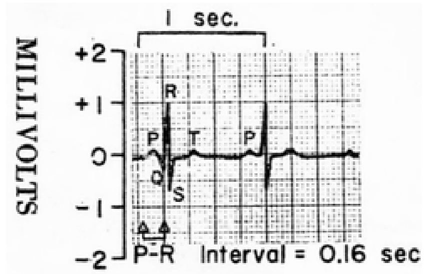
در این صورت $i=0,1$ ؛ $\rho(f_i)=\frac{\rho(Rf_i)}{1+\rho(Rf_i)}$ و $i=0,1$؛ $\rho(f_i)=\frac{1}{2-\rho(Lf_i)}$

لم ۲ . اگر $f(1)<f(0)<c_1$ ، آنگاه نگاشت های بازبهجارش شده Rf_i ، $i=0,1$، خوشتعریف هستند و $\rho(f_i)=\frac{\rho(Rf_i)}{1+\rho(Rf_i)}$ ، $i=0,1$. و اگر $c_2<f(1)<f(0)$، آنگاه نگاشت های باز بهنجارش شده Lf_i ، $i=0,1$، خوشتعریف اند و $\rho(f_i)=\frac{1}{2-\rho(Lf_i)}$ ، $i=0,1$.

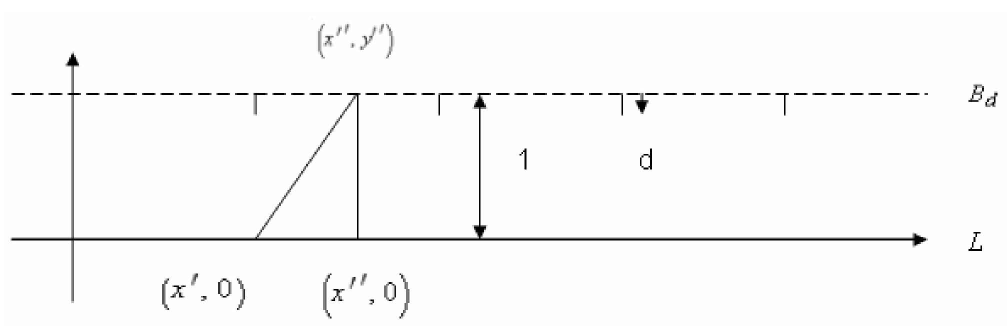
اثبات . ($[P\text{-}G]$ را ببینید) .

تشریح موضوع

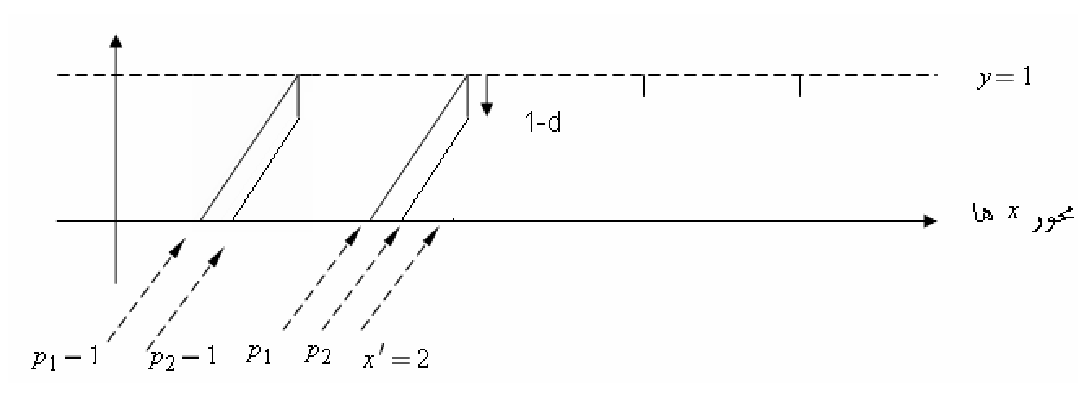
یکی از راه های تحلیل آریتمی های قلبی عبارتست از ثبت اختلاف پتانسیل الکتریکی روی سطح بدن که فعالیت الکتریکال وابسته به ضربان قلب را نشان می دهد



با کنترل الکتروشیمیایی ضربان ساز، تعداد تپش های قلب را با آهنگ ثابت افزایش می دهیم. سپس با ایجاد مانعی فعالیت قلب را به صفر می رسانیم. با این کار اختلالی در فعالیت ریتمک و منظم قلب ایجاد می کنیم. در این لحظه نمودار ضربان ها بر روی کاغذ الکتروکاردیوگرام در نقطه بازگشت (نقطه تحریک ناپذیری) قرار دارد در این دو شاخه متمــایز منحنی ضربان ها، دارای مماس مشترک بوده و منحنی یک تغییر جهت کامل می دهد. حال فرض کنیم L محور x ها را در صفحه نشان دهد و به ازای هر $0 < d < 1$ مانع B_d را به صورت مجموعه $B_d\{(x,y)|y = 1\}\cup(\cup_{n\in Z}\{(x,y)|x = n;1-d \le y \le 1\}$ تعریف می کنیم. چنانکه در شکل (ب) نشان داده ایم خطی مار بر نقطه $(x',0) \in L$ و با شیب $\alpha > 0$ رسم می کنیم. خط مذکور B_d را در نقطه (x'',y'') قطع می کند. با تصویر کردن این نقطه روی L نقطه جدید $(x'',0)$ به دست می آید. نگاشت $\widetilde{F} : R \to R$ را با ضابطه $\widetilde{F}(x') = x''$ تعریف می کنیم .



حال نقاط P_1 و P_2 را روی خط L در مختصات دکارتی طوری اختیار می کنیم که خطوط مار بر این نقاط با شیب $\alpha > 0$ زبانه متناظر با $x' = 2$ را قطع کنند.



بنا به تعریف معادله خط گذرنده بر نقطه (x'_0,y'_0) با شیب α؛ $L_1: \quad y'-y'_0=\alpha(x'-x'_0)$ در نتیجه $y'-0=\alpha(x'-P_1)$

بنابراین $y'=\alpha(x'-P_1)$ و چون $(2,1)\in L_1$ لذا $1=\alpha(2-P_1)$ و بنابراین $L_2: \quad y'=\alpha(x'-P_2)$ و $P_1=2-\frac{1}{\alpha}$ و

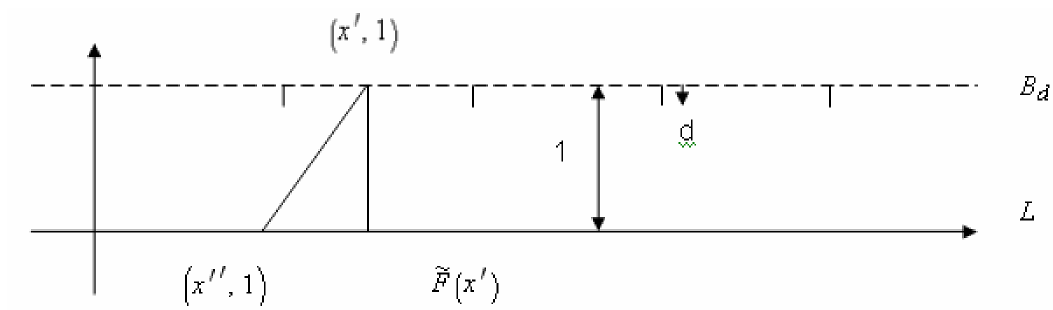
چون $(2,1-d)\in L_2$ لذا $1-d=\alpha(2-P_2)$.

بنابراین $P_2=2-\frac{1-d}{\alpha}$

و در نتیجه $\widetilde{F}$ با ضابطه زیر تعریف می شود $\begin{array}{l}\widetilde{F}:\left[2-\frac{1}{\alpha},2-\frac{1-d}{\alpha}\right]\to R\\ \widetilde{F}(x')=2\end{array}$.

حال نقطه $(x',1)\in L$ را طوری اختیار می کنیم که خط مار بر این نقطه با شیب $\alpha>0$ هیچ یک از زبانه های B_d را قطع نکند.

با تصویر کردن این نقــطه روی محور x ها نقطه جدید $(x'',0)$ به دست می آید. نگاشت $\widetilde{F}$ را با ضابطه $x''=\widetilde{F}(x')$ تعریف می کنیم.



$\tan(\beta)=\alpha=\frac{1}{\widetilde{F}(x')-x'}$. لذا $\widetilde{F}(x')-x'=\frac{1}{\alpha}$.

بنابرین $\widetilde{F}(x')=x'+\frac{1}{\alpha}$ و در نتیجه $\widetilde{F}$ با ضابطه زیر تعریف می شود. $\begin{array}{l}\widetilde{F}:\left(1-\frac{1-d}{\alpha},2-\frac{1}{\alpha}\right)\to R\\ \widetilde{F}(x')=x'+\frac{1}{\alpha}\end{array}$.

بنابراین
$$\widetilde{F}:\left(1-\frac{1-d}{\alpha},2-\frac{1}{\alpha}\right]\to R$$
$$\widetilde{F}(x')=\begin{cases}x'+\frac{1}{2} & ,x'\in\left(1-\frac{1-d}{\alpha},2-\frac{1}{\alpha}\right)\\ 2 & ,x'\in\left[2-\frac{1}{\alpha},2-\frac{1-d}{\alpha}\right]\end{cases}$$

سپس نگاشت $\widetilde{F}:R\to R$ را با ضابطه زیر در نظر می گیریم. $\widetilde{F}(x')=\begin{cases}x'+\frac{1}{2} & ,x'\in\left(1-\frac{1-d}{\alpha},2-\frac{1}{\alpha}\right)\\ 2 & ,x\in\left[2-\frac{1}{\alpha},2-\frac{1-d}{\alpha}\right]\end{cases}$ و برای مقادیر دیگر $x'\in R$؛ $\widetilde{F}(x'+1)=\widetilde{F}(x')+1$

حال با جابجایی مختصات به اندازه $x=x'-\left(1-\frac{1-d}{\alpha}\right)$ و $F(x)=\tilde{F}(x')-\frac{1}{\alpha}$، داریم؛

اگر $0<x<1-\frac{d}{\alpha}$ آنگاه و اگر $2-\frac{1}{\alpha}\le x'\le 2-\frac{1-d}{\alpha}$ آنگاه $1-\frac{d}{\alpha}\le x\le 1$.

سپس نگاشت $\tilde{F}$ را به صورت زیر در نظر می گیریم $\tilde{F}(x)=\begin{cases} x+1+\frac{d}{\alpha} & ,x\in\left(0,1-\frac{d}{\alpha}\right) \\ 2 & ,x\in\left[1-\frac{d}{\alpha},1\right] \end{cases}$. و برای سایر مقادیر $x\in R$؛ $\tilde{F}(x+1)=\tilde{F}(x)+1$.

در نتیجه ؛ $F:R\to R$

$$F(x)=\begin{cases} x+1+\frac{d}{\alpha}-\frac{1}{\alpha} & ,x\in\left(0,1-\frac{d}{\alpha}\right) \\ 2-\frac{1}{\alpha} & ,x\in\left[1-\frac{d}{\alpha},1\right] \end{cases}$$

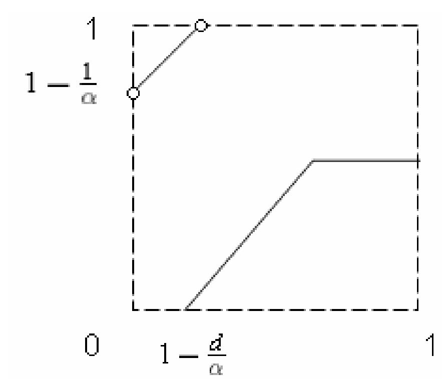
و برای سایر مقادیر $x\in R$؛ $F(x+1)=F(x)+1$. در این صورت

$PG-$ نگاشت f را متناظر با F ضابطه زیر در نظر می گیریم.

$$f:(0,1]\to(0,1]$$

$$f(x)=\begin{cases} x+1+\frac{d}{\alpha}-\frac{1}{\alpha} & ,x\in\left(0,1-\frac{d}{\alpha}\right) \\ 1-\frac{1}{\alpha} & ,x\in\left[1-\frac{d}{\alpha},1\right] \end{cases}$$

نمودار $PG-$ نگاشت فوق در شکل (پ) نشان داده ایم.

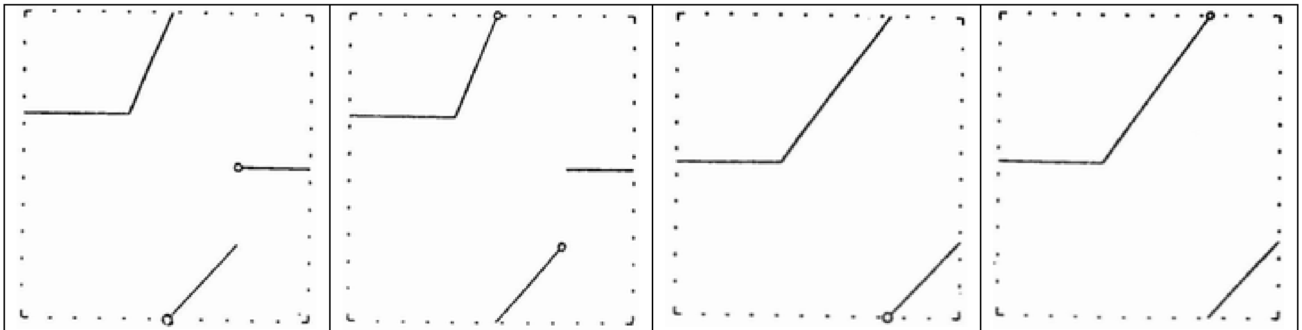


$PG-$ نگاشت فوق، نگاشت نمودارهای مندرج بر روی کاغذ الکتروکاردیوگرام زمانی که قلب ا ز فعالیت منظم خود خارج شده می باشد. در این حالت $c<f(1)<f(0)<P_1<P_2=1$. و با روندی مشابه می توان $PG-$ نگاشت نمودارهای مندرج بر روی کاغذ الکتروکاردیو گرام را در حالتی که $0=P_1<f(1)<P_2<f(0)<c$ به دست آورد. بالابرهای اکسترمال $PG-$ نگاشت فوق به صورت زیر تعریف می شوند. اگر $x\in(0,1]$ آنگاه $F_0(x)=F(x)=F_1(x)$ و در نقطه ناپیوستگی $x=0$؛ $F_0(0)=g_1(F)=\lim_{x\uparrow 1}(F(x)-1)=1-\frac{1}{\alpha}$ و $F_1(0)=g_2(F)=\lim_{x\downarrow 0}F(x)=1+\frac{d-1}{\alpha}$ حال اگر f یک $PG-$ نگاشت و $0=P_1<f(1)\le P_2<f(0)<c$ (مدل آریتمی های قلبی) آنگاه به ازای هر $x\in[c(Rf),1]$؛ $Rf(x)=f^2(x)$. از طرفی اگر $x\in(c(f),1]$ آنگاه $0\le f(x)\le c$. لذا $f(0)\le f^2(x)\le f(c(f))$ و بنابراین $f(0)\le f^2(x)\le 0$. اما با توجه به نحوه تعریف نگاشت Rf ، $f(0)=0$، لذا نگاشت Rf روی بازه $[c(Rf),1]$ ثابت (برابر صفر) است. حال به ازای هر $x\in(0,c(Rf))$؛ $Rf(x)>x$ را در نظر می گیریم (در غیر این صورت $\rho(Rf_i)=0$، $i=0,1$) در این صورت $n\ge 1$ یی وجود دارد به قسمی که

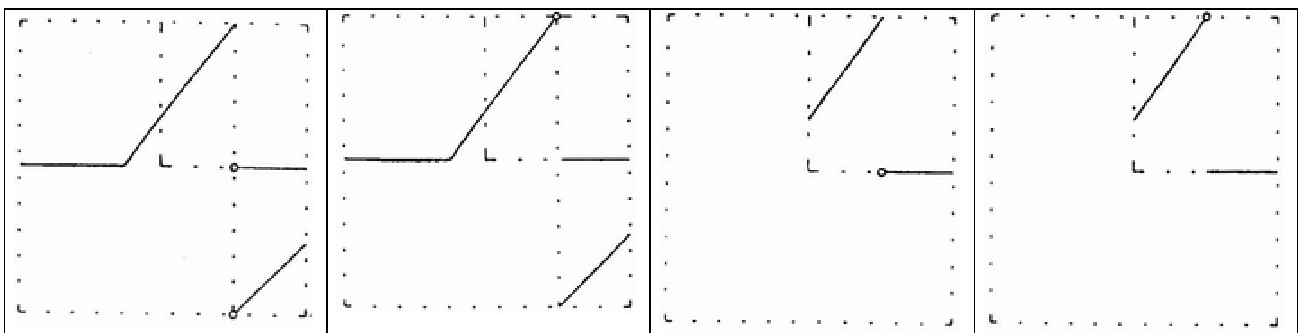
برای $0 \le k \le n$؛ $Rf_1^n(0) \ge c(Rf)$ و $Rf_1^k(0) < c(Rf)$ اگر $Rf_1^n(0) > c(Rf)$ آنگاه $\rho(Rf_i) = \frac{1}{n}$، $i = 0,1$. لذا؛

$\rho(F_0) = \rho(F_1) = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}$ و اگر $Rf_1^n(0) = c(Rf)$ آنگاه $Rf_1(c(Rf)) = 1$ و $Rf_0(c(Rf)) = 0$. بنابراین $\rho(Rf_1) = \frac{1}{n}$ و $\rho(Rf_0) = \frac{1}{1+n}$. لذا $\rho(f_0) = \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+1+1} = \frac{1}{n+2}$، $\rho(f_1) = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}$

نمودارهای زیر ساختار نگاشت های مذکور را وقتی که نشان می دهند. شکل (۱) نمودار نگاشت f_0 ، شکل (۲) نمودار نگاشت f_1، شکل (۳) نمودار نگاشت f_0^2، شکل (۴) نمودار نگاشت f_1^2، شکل (۵) نمودار نگاشت r_0 ، شکل (۶) نمودار نگاشت r_1، شکل (۷) نمودار نگاشت های Rf_0 و f_0 ، شکل (۸) نمودار نگاشت های Rf_1 و f_1 را نمایش می دهند.

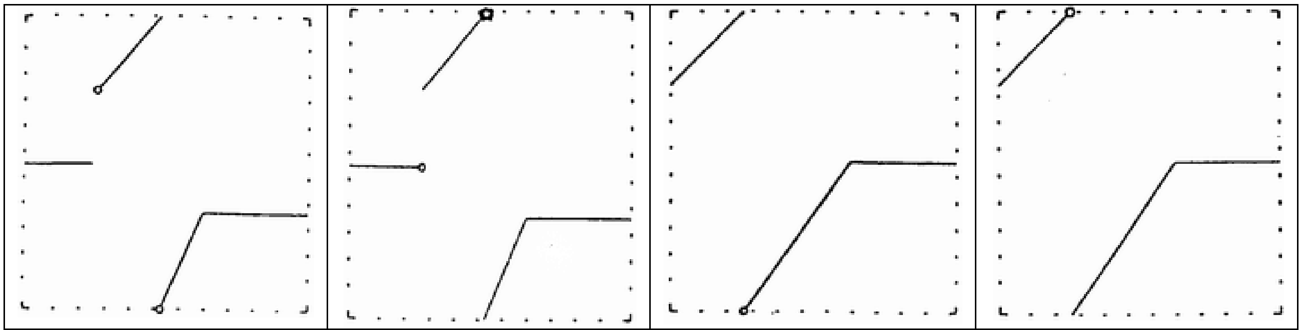


(۱) (۲) (۳) (۴)

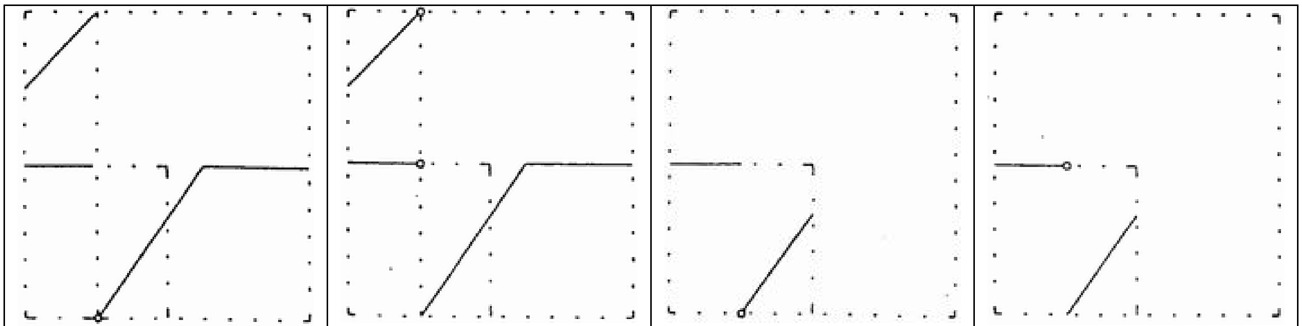


(۵) (۶) (۷) (۸)

و نمودارهای زیرین ساختار نگاشت های مذکور وقتی که $c < f(1) < f(0) < P_1 < P_2 = 1$ نشان می دهند. شکل (۱) نمودار نگاشت f_0، شکل (۲) نمودار نگاشت f_1، شکل (۳) نمودار نگاشت f_0^2، شکل (۴) نمودار نگاشت f_1^2، شکل (۵) نمودار نگاشت l_0 ، شکل (۶) نمودار نگاشت l_1، شکل (۷) نمودار نگاشت های Lf_0 و f_0 ، شکل (۸) نمودار نگاشت های Lf_1 و f_1 را نمایش می دهند .



(۴)	(۳)	(۲)	(۱)



(۸)	(۷)	(۶)	(۵)

حال فرض می کنیم F بالابر یک PG– نگاشت با هم سطحی (P_1,P_2) بوده و F روی $[P_1,P_2]|(0,1)$ مشتق پذیر باشد. اگر به ازای هر $x\in(0,1)|[P_1,P_2]$ ؛ $F'(x)\ge 1$ آنگاه F را نگاشت انبساطی می نامیم و اگر به ازای هر $x\in(0,1)|[P_1,P_2]$ ؛ $F'(x)\le 1$ ، F را نگاشت انقباضی می نامیم .

لم ۳ . فرض کنیم F بالابر یک PG– نگاشت و $P=(P_1,P_2)$ و $G=(g_1,g_2)$ به ترتیب هم سطحی و رخنه آن باشند. اگر $\rho(F)\notin Q$ آنگاه $k\ge 0$ وجود دارد به قسمی که ؛

اگر F انبساطی باشد آنگاه $f^k(G)\subseteq P$

و اگر F انقباضی باشد آنگاه $P\subseteq f^k(G)$.

قضیه ۴ . اگر F بالابر PG– نگاشت مدل آریتمی های قلبی باشد آنگاه $\rho(F)\in Q$

در مدل ارایه شده F انبساطی است (زیرا $F(x)\ge 1$ و $P_1=0$ و یا $P_2=1$ می باشد) حالت را $P_1=0$ در نظر می گیریم. اگر $\rho(F)\notin Q$ آنگاه $\rho(F_0)=\rho(F)=\rho(F_1)$. از طرفی بنا به لم ۳ به ازای $k\ge 0$، $f^k(G)\subseteq P$. اما $f(0)=g_2$ به عبارت دیگر $f(0)=f_1(p_1)=g_2$. بنابراین بنا به لم ۳ $f_1^k(f_1(p_1))\in[P_1,P_2]$. به عبارت دیگر $P_1\le f_1^k(f_1(p_1))\le P_2$ لذا $f_1(P_1)\le f_1^{k+1}(f_1(p_1))\le f_1$. اما $f_1(P_1)=f_1(P_2)$ بنابراین $f_1^{k+1}(f_1(p_1))=f_1(P_1)$ و در نتیجه عدد چرخش F_1 گویاست ($\rho(F)\in Q$) که یک تناقض است بنابراین فرض خلف باطل و حکم همواره برقرار است.

1- *[G] Ghane . F . H , Chaotic behavior in one dimension .*
2- *[G.L - 97] Glass . L et al , Nonlinear dynamics, chaos and complex cardiac arrhythmias, Chaos, Springer (1991)9-2*
3- *[G.L - 84]Glass . L et al,Global bifurcations of a periodically forced biological oscillator, the American physical Society (29) (1984) 1348-1357*
4- *[P.G]Glendinning . P , Bifurcations and rotation numbers for maps of the circle associated with flows on the tours and models of cardiac arrhythmias, Dynamics and stability of systems, Vol . 10 , 4 (1995) 367-386*
5- *[M-t]mackay .R.S and Tresser . C, Transition to chaos for tow – frequency systems, J . Physique Lett, 45 (1984) 741 – 746*
6- *[P]Pierre. N .V, Dynamical systems – an introduction with applications in economics and biology. Proc. Springer (1994) 288 – 290*